



Language: **Ukrainian**

Day: **2**

Квітень 2020

Задача 4. Перестановка цілих чисел $1, 2, \dots, m$ називається свіжою якщо не існує натурального $k < m$ такого, що перші k чисел в цій перестановці є числами $1, 2, \dots, k$ в деякому порядку. Нехай f_m – кількість свіжих перестановок чисел $1, 2, \dots, m$.

Доведіть, що $f_n \geq n \cdot f_{n-1}$ для всіх $n \geq 3$.

Наприклад, якщо $m = 4$, то перестановка $(3, 1, 4, 2)$ є свіжою, у той час як перестановка $(2, 3, 1, 4)$ не є свіжою.

Задача 5. Розглянемо трикутник ABC з кутом $\angle BCA > 90^\circ$. Описане коло Γ трикутника ABC має радіус R . Строго всередині відрізка AB існує точка P така, що $PB = PC$ і довжина відрізка PA рівна R . Серединний перпендикуляр PB перетинає коло Γ в точках D та E .

Доведіть, що P є центром вписаного кола трикутника CDE .

Задача 6. Нехай $m > 1$ – ціле число. Послідовність $a_1, a_2, a_3, \dots$ визначена як $a_1 = a_2 = 1$, $a_3 = 4$, і для кожного $n \geq 4$ справедлива рівність

$$a_n = m(a_{n-1} + a_{n-2}) - a_{n-3}.$$

Знайдіть всі цілі числа m такі, що кожен елемент цієї послідовності є повним квадратом.

Language: Ukrainian

Час виконання: 4 години 30 хвилин
Кожна задача оцінюється в 7 балів

Для того, щоб ця олімпіада була чесною та цікавою, будь ласка, в жодній формі не розголошуйте і не поширяйте на ці задачі в інтернеті, соціальних мережах і т. ін. до 01:00 неділі 19 квітня.