

Nisan 2020

Soru 4. $1, 2, \dots, m$ tam sayılarının bir permütasyonunda, ilk k sayı $1, 2, \dots, k$ 'nin bir sıralanışı olacak şekilde $k < m$ pozitif tam sayısı bulunmuyorsa, bu permütasyona *taze* denir. $1, 2, \dots, m$ tam sayılarının taze permütasyonlarının sayısı f_m olsun.

Her $n \geq 3$ için $f_n \geq n \cdot f_{n-1}$ olduğunu gösteriniz.

Örneğin $m = 4$ için, $(3, 1, 4, 2)$ permütasyonu taze iken $(2, 3, 1, 4)$ permütasyonu taze değildir.

Soru 5. Bir ABC üçgeninde $\angle BCA > 90^\circ$ 'dir. ABC 'nin çevrel çemberi Γ 'nin yarıçapı R olsun. AB doğru parçasının bir P iç noktası için $|PB| = |PC|$ ve $|PA| = R$ 'dir. $[PB]$ 'nin orta dikmesi Γ 'yı D ve E noktalarında kesiyor.

P 'nin CDE üçgeninin iç teğet çemberinin merkezi olduğunu gösteriniz.

Soru 6. $m > 1$ bir tam sayı olsun. $a_1, a_2, a_3, \dots$ dizisi $a_1 = a_2 = 1$, $a_3 = 4$, ve her $n \geq 4$ için,

$$a_n = m(a_{n-1} + a_{n-2}) - a_{n-3}$$

olarak tanımlanıyor. Bu dizinin tüm elemanlarının tam kare olmasını sağlayan bütün m tam sayılarını belirleyiniz.