EGMO VIRTUAL
Netherlands | 2020
European Girls' Mathematical Olympiad

Language: **Spanish**

Day: 2

Abril 2020

Problema 4. Una permutación de los enteros 1, 2, ..., m se llama *fresca* si no existe ningún entero positivo $k < m$ tal que los primeros k elementos de la permutación son los números 1, 2, ..., k en algún orden. Sea f_m el número de permutaciones frescas de los enteros 1, 2, ..., m.

Demuestre que $f_n \geq n \cdot f_{n-1}$ para todo $n \geq 3$.

Por ejemplo, para $m = 4$ la permutación $(3, 1, 4, 2)$ es fresca, mientras que la permutación $(2, 3, 1, 4)$ no lo es.

Problema 5. Considere el triángulo ABC con $\angle BCA > 90°$. Sea R el radio del circuncírculo Γ de ABC. En el segmento AB existe un punto P con $PB = PC$ y tal que la longitud de PA es igual a R. La mediatriz de PB corta a Γ en los puntos D y E.

Demuestre que P es el incentro del triángulo CDE.

Problema 6. Sea $m > 1$ un entero. Se define una sucesión $a_1, a_2, a_3, \ldots$ como $a_1 = a_2 = 1$, $a_3 = 4$, y para todo $n \geq 4$,

$$a_n = m(a_{n-1} + a_{n-2}) - a_{n-3}.$$

Determine todos los enteros m tales que cada término de la sucesión es un cuadrado perfecto.

Language: Spanish

Tiempo: 4 horas y 30 minutos
Cada problema vale 7 puntos

Para que esta olimpiada sea justa y pueda ser disfrutada de la misma manera por todas, les rogamos no difundir estos problemas, ni en internet, ni en redes sociales, ni de ninguna otra forma, hasta el sábado 18 de abril a las 22:00 UTC (16:00 de Costa Rica y Sinaloa, 17:00 de CDMX, Perú y Ecuador, 18:00 de Chile y 23:59 de España).