

sobota, 18. april 2020

Naloga 4. Permutacija celih števil $1, 2, \dots, m$ je *sveža*, če ne obstaja naravno število $k < m$, za katero bi bilo prvih k števil permutacije natanko števila $1, 2, \dots, k$ v nekem vrstnem redu. Naj bo f_m število *svežih* permutacij celih števil $1, 2, \dots, m$.

Dokaži, da $f_n \geq n \cdot f_{n-1}$ za vsak $n \geq 3$.

Primer. Če $m = 4$, potem je permutacija $(3, 1, 4, 2)$ sveža, permutacija $(2, 3, 1, 4)$ pa ni sveža.

Naloga 5. Dan je trikotnik ABC , v katerem $\angle BCA > 90^\circ$. Očrtana krožnica Γ trikotnika ABC ima polmer R . Na daljci AB leži točka P , za katero velja $|PB| = |PC|$ ter $|PA| = R$. Simetrala daljice PB seka krožnico Γ v točkah D in E .

Dokaži, da je P središče včrtane krožnice trikotnika CDE .

Naloga 6. Naj bo $m > 1$ celo število. Zaporedje $a_1, a_2, a_3, \dots$ je definirano s predpisom $a_1 = a_2 = 1$, $a_3 = 4$ ter za vse $n \geq 4$ je

$$a_n = m(a_{n-1} + a_{n-2}) - a_{n-3}.$$

Poišči vsa cela števila m , za katera so vsi členi zaporedja popolni kvadrati.