

Apríl 2020

Úloha 4. Permutácia celých čísel $1, 2, \dots, m$ sa nazýva *svieža*, ak neexistuje žiadne kladné celé číslo $k < m$ také, že prvých k čísel v permutácii sú čísla $1, 2, \dots, k$ v nejakom poradí. Nech f_m je počet sviežich permutácií čísel $1, 2, \dots, m$.

Dokážte, že pre všetky $n \geq 3$ platí nerovnosť $f_n \geq n \cdot f_{n-1}$.

Napríklad, ak $m = 4$, tak permutácia $(3, 1, 4, 2)$ je svieža, naproti tomu permutácia $(2, 3, 1, 4)$ nie je.

Úloha 5. Nech ABC je trojuholník taký, že $|\angle BCA| > 90^\circ$. Kružnica Γ jemu opísaná má polomer R . Vnútri úsečky AB leží bod P taký, že $|PB| = |PC|$ a dĺžka úsečky PA je rovná R . Os úsečky PB pretína Γ v bodoch D a E .

Dokážte, že P je stredom kružnice vpísanej trojuholníku CDE .

Úloha 6. Nech $m > 1$ je celé číslo. Postupnosť $a_1, a_2, a_3, \dots$ je definovaná vzťahmi $a_1 = a_2 = 1$, $a_3 = 4$, a pre všetky $n \geq 4$

$$a_n = m(a_{n-1} + a_{n-2}) - a_{n-3}.$$

Nájdite všetky celé čísla m také, že každý člen tejto postupnosti je druhá mocnina celého čísla.