



Language: Russian

Day: 2

17 апреля 2020

Задача 4. Перестановку целых чисел $1, 2, \dots, m$ будем называть *свежей*, если не существует положительного целого $k < m$ такого, что первые k чисел в этой перестановке — это $1, 2, \dots, k$ в некотором порядке. Пусть f_m — количество всех свежих перестановок чисел $1, 2, \dots, m$.

Докажите, что $f_n \geq n \cdot f_{n-1}$ для всех $n \geq 3$.

Например, если $m = 4$, то перестановка $(3, 1, 4, 2)$ является свежей, а перестановка $(2, 3, 1, 4)$ не является.

Задача 5. Рассмотрим треугольник ABC , у которого $\angle BCA > 90^\circ$. Радиус окружности Γ , описанной около треугольника ABC , равен R . На отрезке AB нашлась точка P такая, что $PB = PC$, а длина PA равна R . Серединный перпендикуляр к PB пересекает Γ в точках D и E .

Докажите, что P является центром вписанной окружности треугольника CDE .

Задача 6. Пусть $m > 1$ — целое число. Последовательность a_1, a_2, a_3, \dots задана равенствами $a_1 = a_2 = 1$, $a_3 = 4$, а для всех $n \geq 4$:

$$a_n = m(a_{n-1} + a_{n-2}) - a_{n-3}.$$

Найдите все целые m такие, что каждый член последовательности является точным квадратом.

Language: Русский

Время работы: 4 часа 30 минут
Каждая задача оценивается из 7 баллов

Чтобы олимпиада была честной и доставила всем удовольствие, пожалуйста, не упоминайте и не пишите ничего про задачи в интернете и любых социальных сетях до 01:00 ночи 19 апреля по московскому времени.