Language: **Portuguese**

Day: 2

Abril 2020

Problema 4. Uma permutação dos inteiros 1, 2, ..., m é chamada *fresh* se não existe inteiro positivo $k < m$ tal que os k primeiros números na permutação são 1, 2, ..., k em alguma ordem. Seja f_m o número de permutações *fresh* dos inteiros 1, 2, ..., m.

Prove que $f_n \geq n \cdot f_{n-1}$ para todo $n \geq 3$.

Por exemplo, se $m = 4$, *então a permutação* $(3,1,4,2)$ *é fresh, enquanto a permutação* $(2,3,1,4)$ *não é fresh.*

Problema 5. Considere o triângulo ABC com $\angle BCA > 90°$. O circuncírculo Γ de ABC tem raio R. Existe um ponto P no interior do segmento de linha AB tal que $PB = PC$ e o comprimento de PA é R. A mediatriz de PB intersecta Γ nos pontos D e E.

Prove que P é o incentro do triângulo CDE.

Problema 6. Seja $m > 1$ um número inteiro. Uma sequência $a_1, a_2, a_3, \ldots$ é definida por $a_1 = a_2 = 1$, $a_3 = 4$ e, para todo $n \geq 4$,

$$a_n = m(a_{n-1} + a_{n-2}) - a_{n-3}.$$

Determine todos os números inteiros m tais que todo termo da sequência é um quadrado perfeito.

Idioma: Português

Tempo: 4 horas e 30 minutos
Cada problema vale 7 pontos

Para fazer esta competição justa e divertida para todas, por favor não mencione ou comente os problemas na internet ou nas redes sociais até Sábado 18 de Abril, 19:00 (Horário de Brasília).