

Kwiecień 2020 r.

Zadanie 4. Permutację liczb całkowitych $1, 2, \dots, m$ nazwiemy *świeżą*, jeżeli nie istnieje taka dodatnia liczba całkowita $k < m$, że pierwszymi k liczbami w tej permutacji są, w pewnej kolejności, liczby $1, 2, \dots, k$. Niech f_m będzie liczbą świeżych permutacji liczb całkowitych $1, 2, \dots, m$.

Udowodnić, że dla wszystkich $n \geq 3$ zachodzi nierówność $f_n \geq n \cdot f_{n-1}$.

Przykładowo, dla $m = 4$, permutacja $(3, 1, 4, 2)$ jest świeża, natomiast permutacja $(2, 3, 1, 4)$ nie jest świeża.

Zadanie 5. Dany jest trójkąt ABC , w którym $\angle BCA > 90^\circ$. Okrąg Γ jest okręgiem opisanym na trójkącie ABC i ma promień R . Wewnątrz odcinka AB znajduje się taki punkt P , że $PB = PC$ oraz długość odcinka PA jest równa R . Symetralna odcinka PB przecina okrąg Γ w punktach D i E .

Wykazać, że punkt P jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt CDE .

Zadanie 6. Niech $m > 1$ będzie liczbą całkowitą. Ciąg $a_1, a_2, a_3, \dots$ spełnia $a_1 = a_2 = 1$, $a_3 = 4$ oraz dla wszystkich $n \geq 4$,

$$a_n = m(a_{n-1} + a_{n-2}) - a_{n-3}.$$

Wyznaczyć wszystkie liczby całkowite m , dla których każdy wyraz ciągu jest kwadratem liczby całkowitej.