

Април 2020

Задача 4. Една пермутација на броевите $1, 2, \dots, m$ се нарекува „свежа“ ако не постои природен број $k < m$, таков што првите k броеви во пермутацијата се броевите $1, 2, \dots, k$, во некој редослед. Нека f_m е бројот на свежи пермутации на природните броеви $1, 2, \dots, m$.

Докажи дека за секој $n \geq 3$ важи $f_n \geq n \cdot f_{n-1}$.

Забелешка: За $m = 4$, пермутацијата $(3, 1, 4, 2)$ е свежа, додека пермутацијата $(2, 3, 1, 4)$ не е свежа.

Задача 5. Даден е триаголник ABC во кој $\angle BCA > 90^\circ$. Опишаната кружница Γ околу триаголникот ABC има радиус R . Во внатрешноста на отсечката AB постои точка P за која што должините на отсечките PB и PC се еднакви, а должината на отсечката PA е R . Симетралата на отсечката PB ја сече опишаната кружница Γ во точките D и E .

Докажи дека точката P е центар на впишаната кружница во триаголникот CDE .

Задача 6. Нека $m > 1$ е природен број. Низата $a_1, a_2, a_3, \dots$ е дефинирана со: $a_1 = a_2 = 1$, $a_3 = 4$, и за секој $n \geq 4$, важи

$$a_n = m(a_{n-1} + a_{n-2}) - a_{n-3}.$$

Одреди ги сите природни броеви m за кои секој член на низата е полн квадрат.