

2020 m. balandis

4 uždavinys. Natūraliųjų skaičių $1, 2, \dots, m$ kėlinį vadinsime *gaiviu*, jei joks natūralusis $k < m$ netenkina tokios sąlygos: pirmieji k kėlinio skaičių yra skaičiai $1, 2, \dots, k$, surašyti kokia nors tvarka. Skaičių $1, 2, \dots, m$ gaivių kėlinių iš viso yra f_m .

Irodykite, kad nelygybė $f_n \geq n \cdot f_{n-1}$ galioja visiems natūraliesiems $n \geq 3$.

Pavyzdžiui, kai $m = 4$, tai kėlinys $(3, 1, 4, 2)$ gaivus, o kėlinys $(2, 3, 1, 4)$ nėra gaivus.

5 uždavinys. Apie trikampį ABC , kuriame $\angle BCA > 90^\circ$, apibrėžtas apskritimas Γ , kurio spindulio ilgis lygus R . Egzistuoja toks atkarpos AB vidaus taškas P , kad $PB = PC$, o atkarpos PA ilgis lygus R . Atkarpos PB vidurio statmuo kerta Γ taškuose D ir E .

Irodykite, kad P yra į trikampį CDE įbrėžto apskritimo centras.

6 uždavinys. Nagrinėkime bet koki natūralųjį skaičių $m > 1$. Seką $a_1, a_2, a_3, \dots$ apibrėžkime lygybėmis $a_1 = a_2 = 1$, $a_3 = 4$ bei visiems natūraliesiems $n \geq 4$ galiojančia lygybe

$$a_n = m(a_{n-1} + a_{n-2}) - a_{n-3}.$$

Nustatykite visus natūraliuosius skaičius m , kuriems kiekvienas sekos narys yra sveikojo skaičiaus kvadratas.