

יום שישי, 17 באפריל, 2020

שאלה 4. תמורה של המספרים השלמים $1, 2, \dots, m$ נקראת טרייה אם לא קיים שלם חיובי $k < m$ עבורו k המספרים הראשונים בתמורה הם המספרים $1, 2, \dots, k$ בסדר כלשהו. נסמן ב- f_m את מספר התמורות הטרייות של המספרים $1, 2, \dots, m$.

הוכיחי כי $f_n \geq n \cdot f_{n-1}$ לכל $n \geq 3$.

(לדוגמה, עבור $m = 4$, התמורה $(3, 1, 4, 2)$ היא טרייה, בעוד שהתמורה $(2, 3, 1, 4)$ אינה טרייה.)

שאלה 5. נתבונן במשולש ABC עם $\angle BCA > 90^\circ$. נסמן ב- Γ את המעגל החוסם של ABC , ונסמן ב- R את אורך הרדיוס של Γ . נתון כי קיימת נקודה P בקטע AB (לא כולל הקצוות) עבורה $PB = PC$ וכן $PA = R$. האנך האמצעי לקטע PB נחתך עם Γ בנקודות D ו- E .

הוכיחי כי P הינה מרכז המעגל החוסם במשולש CDE .

שאלה 6. יהא $m > 1$ מספר שלם. סדרה $a_1, a_2, a_3, \dots$ מוגדרת על פי $a_1 = a_2 = 1$, $a_3 = 4$, ולכל $n \geq 4$,

$$a_n = m(a_{n-1} + a_{n-2}) - a_{n-3}$$

מצאי את כל השלמים m עבורם כל איברי הסדרה הם ריבועים שלמים.

Language: Hebrew

משך הבחינה 4 שעות ו-30 דקות
כל שאלה שווה 7 נקודות

על מנת שהתחרות תהיה הוגנת ומהנה עבור כולן, אנא אל תצייני או תתייחסי לשאלות באינטרנט או ברשתות החברתיות עד ליום ראשון ה-19 באפריל, בשעה 01:00 (לפנות בוקר, שעון ישראל).