

Απρίλιος 2020

Πρόβλημα 4. Μια μετάθεση των ακεραίων $1, 2, \dots, m$ ονομάζεται *φρέσκια* εάν δεν υπάρχει θετικός ακέραιος $k < m$ τέτοιος ώστε οι πρώτοι k αριθμοί στη μετάθεση να είναι οι $1, 2, \dots, k$ σε κάποια σειρά. Έστω f_m το πλήθος των φρέσκων μεταθέσεων των ακεραίων $1, 2, \dots, m$.

Να αποδειχθεί ότι $f_n \geq n \cdot f_{n-1}$ για κάθε $n \geq 3$.

Για παράδειγμα, αν $m = 4$, τότε η μετάθεση $(3, 1, 4, 2)$ είναι φρέσκια, ενώ η μετάθεση $(2, 3, 1, 4)$ δεν είναι.

Πρόβλημα 5. Θεωρούμε τρίγωνο ABC με $\angle BCA > 90^\circ$. Ο περιγεγραμμένος κύκλος Γ του ABC έχει ακτίνα R . Υπάρχει σημείο P στο εσωτερικό του τμήματος AB τέτοιο ώστε $PB = PC$ και το μήκος του PA ισούται με R . Η μεσοκάθετος του PB τέμνει τον Γ στα σημεία D και E .

Να αποδειχθεί ότι το P είναι το έγκεντρο του τριγώνου CDE .

Πρόβλημα 6. Έστω ακέραιος $m > 1$. Η ακολουθία $a_1, a_2, a_3, \dots$ ορίζεται με $a_1 = a_2 = 1$, $a_3 = 4$, και για κάθε $n \geq 4$,

$$a_n = m(a_{n-1} + a_{n-2}) - a_{n-3}.$$

Να βρεθούν όλοι οι ακέραιοι m τέτοιοι ώστε κάθε όρος της ακολουθίας να είναι τέλειο τετράγωνο.