

Language: German

Day: 2

April 2020

**Aufgabe 4.** Eine Permutation der Zahlen 1, 2, ..., m wird als frisch bezeichnet, falls es keine positive ganze Zahl k < m gibt, sodass die ersten k Zahlen dieser Permutation 1, 2, ..., k in einer beliebigen Reihenfolge sind. Sei  $f_m$  die Anzahl von frischen Permutationen der Zahlen 1, 2, ..., m.

Beweise, dass  $f_n \ge n \cdot f_{n-1}$  für alle  $n \ge 3$ .

Zum Beispiel ist für m=4 die Permutation (3,1,4,2) frisch, wogegen die Permutation (2,3,1,4) nicht frisch ist.

**Aufgabe 5.** Sei ABC ein Dreieck mit  $\angle BCA > 90^{\circ}$ , und sei  $\Gamma$  der Umkreis des Dreiecks ABC mit Radius R. Es gebe einen Punkt P im Inneren der Strecke AB, sodass PB = PC gilt und die Strecke PA die Länge R hat. Die Mittelsenkrechte (Streckensymmetrale) der Strecke PB schneide  $\Gamma$  in den Punkten D und E.

Beweise, dass P der Inkreismittelpunkt des Dreiecks CDE ist.

**Aufgabe 6.** Sei m > 1 eine ganze Zahl. Eine Folge  $a_1, a_2, a_3, \ldots$  ist definiert durch  $a_1 = a_2 = 1$ ,  $a_3 = 4$ , und

$$a_n = m(a_{n-1} + a_{n-2}) - a_{n-3}$$

für alle  $n \ge 4$ .

Bestimme alle ganzen Zahlen m, für die jedes Folgenglied eine Quadratzahl ist.

Language: German Zeit: 4 Stunden und 30 Minuten Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

Um allen Teilnehmerinnen einen fairen und unterhaltsamen Wettbewerb zu ermöglichen, bitten wir alle, die Aufgaben bis Samstag, 18. April 2020, 23:59 keinesfalls im Internet oder in öffentlichen sozialen Medien weiterzuleiten oder zu besprechen.