



Language: French

Day: 2

Avril 2020

Problème 4. Une permutation des entiers $1, 2, \dots, m$ est dite *folle* s'il n'existe aucun entier strictement positif $k < m$ tel que les k premiers nombres de la permutation soient $1, 2, \dots, k$ dans un certain ordre. Soit f_m le nombre de permutations folles des entiers $1, 2, \dots, m$.

Prouver que $f_n \geq n \cdot f_{n-1}$ pour chaque $n \geq 3$.

Par exemple, pour $m = 4$, la permutation $(3, 1, 4, 2)$ est folle, tandis que la permutation $(2, 3, 1, 4)$ ne l'est pas.

Problème 5. Soit ABC un triangle tel que $\widehat{BCA} > 90^\circ$. Le cercle Γ circonscrit à ABC a pour rayon R . Il existe un point P intérieur au segment $[AB]$ tel que les longueurs $|PB| = |PC|$ et $|PA| = R$. La médiatrice de $[PB]$ coupe Γ aux points D et E .

Démontrer que P est le centre du cercle inscrit au triangle CDE .

Problème 6. Soit $m > 1$ un entier. Une suite a_1, a_2, a_3, \dots est définie par $a_1 = a_2 = 1$, $a_3 = 4$, et pour tout $n \geq 4$,

$$a_n = m(a_{n-1} + a_{n-2}) - a_{n-3}.$$

Déterminer tous les entiers m tels que chaque terme de la suite soit un carré.

Language: French

Durée: 4 heures et 30 minutes
Chaque problème vaut 7 points

Pour que cette compétition reste juste et plaisante pour chacune, évitez de publier ou de discuter des problèmes sur internet ou sur les réseaux sociaux avant le samedi 18 avril 23h59 CEST.