



Language: Finnish

Day: 2

Huhtikuu 2020

Tehtävä 4. Sanotaan, että kokonaislukujen $1, 2, \dots, m$ permutaatio on *tuore*, jos ei ole olemassa positiivista kokonaislukua $k < m$, jolle permutaation k ensimmäistä lukua ovat $1, 2, \dots, k$ jossakin järjestyksessä. Olkoon f_m kokonaislukujen $1, 2, \dots, m$ tuoreiden permutaatioiden lukumäärä.

Todista, että $f_n \geq n \cdot f_{n-1}$ kaikilla $n \geq 3$.

Esimerkiksi, jos $m = 4$, niin permutaatio $(3, 1, 4, 2)$ on tuore, kun taas permutaatio $(2, 3, 1, 4)$ ei ole.

Tehtävä 5. Olkoon ABC kolmio, jolle $\angle BCA > 90^\circ$. Kolmion ABC ympäri piirretyn ympyrän Γ säde on R . Janalla AB on sisäpiste P , jolle $PB = PC$ ja janan PA pituus on R . Janan PB keskinormaali leikkaa ympyrän Γ pisteissä D ja E .

Todista, että P on kolmion CDE sisään piirretyn ympyrän keskipiste.

Tehtävä 6. Olkoon $m > 1$ kokonaisluku. Jono a_1, a_2, a_3, \dots määritellään seuraavasti: $a_1 = a_2 = 1$, $a_3 = 4$ ja kaikilla $n \geq 4$,

$$a_n = m(a_{n-1} + a_{n-2}) - a_{n-3}.$$

Määritä kaikki kokonaisluvut m , joille kaikki jonon jäsenet ovat neliölukuja.

Language: Finnish

Aikaa on 4 tuntia ja 30 minuuttia
Jokainen tehtävä on 7 pisteen arvoinen

Jotta kilpailu olisi reilu ja mukava kaikille, älä mainitse tehtäviä tai viittaa tehtäviin internetissä tai sosiaalisessa mediassa ennen sunnuntaita 19. huhtikuuta klo 01:00.