

April 2020

Opgave 4. Een permutatie van de gehele getallen $1, 2, \dots, m$ wordt *luchtig* genoemd als er geen geheel getal k bestaat met $1 \leq k < m$ zodat de eerste k getallen van de permutatie in een of andere volgorde de getallen $1, 2, \dots, k$ zijn. Laat f_m het aantal luchtige permutaties zijn van de getallen $1, 2, \dots, m$.

Bewijs dat $f_n \geq n \cdot f_{n-1}$ voor alle $n \geq 3$.

Bijvoorbeeld als $m = 4$, dan is de permutatie $(3, 1, 4, 2)$ luchtig, terwijl de permutatie $(2, 3, 1, 4)$ dat niet is.

Opgave 5. Laat $\triangle ABC$ een driehoek zijn met $\angle BCA > 90^\circ$. De omgeschreven cirkel Γ van $\triangle ABC$ heeft een straal van lengte R . Er bestaat een punt P op het inwendige van lijnstuk AB zodat $|PB| = |PC|$ en de lengte $|PA|$ gelijk aan R is. De middelloodlijn van PB snijdt Γ in de punten D en E .

Bewijs dat P het middelpunt van de ingeschreven cirkel van driehoek CDE is.

Opgave 6. Laat $m > 1$ een geheel getal zijn. Een oneindig rijtje $a_1, a_2, a_3, \dots$ wordt op de volgende manier gedefinieerd: $a_1 = a_2 = 1$, $a_3 = 4$, en voor alle $n \geq 4$:

$$a_n = m(a_{n-1} + a_{n-2}) - a_{n-3}.$$

Vind alle gehele getallen m zodat elke term van het rijtje het kwadraat is van een geheel getal.