



Language: Danish

Day: 2

17. april 2020

**Opgave 4.** En permutation af de hele tal  $1, 2, \dots, m$  kaldes *frisk* hvis der ikke findes et positivt helt tal  $k < m$  så de første  $k$  tal i permutationen er  $1, 2, \dots, k$  i en eller anden rækkefølge. Lad  $f_m$  være antallet af friske permutationer af  $1, 2, \dots, m$ .

Vis at  $f_n \geq n \cdot f_{n-1}$  for alle  $n \geq 3$ .

Hvis for eksempel  $m = 4$ , da er permutationen  $(3, 1, 4, 2)$  frisk, hvorimod permutationen  $(2, 3, 1, 4)$  ikke er frisk.

**Opgave 5.** Betragt trekant  $ABC$  hvor  $\angle BCA > 90^\circ$ . Den omskrevne cirkel  $\Gamma$  til trekant  $ABC$  har radius  $R$ . Der findes et punkt  $P$  på det indre af linjestykket  $AB$  så  $|PB| = |PC|$ , og så længden af  $PA$  er  $R$ . Midtnormalen til linjestykket  $PB$  skærer  $\Gamma$  i punkterne  $D$  og  $E$ .

Vis at  $P$  er centrum i den indskrevne cirkel til trekant  $CDE$ .

**Opgave 6.** Lad  $m > 1$  være et helt tal. En følge  $a_1, a_2, a_3, \dots$  er defineret ved  $a_1 = a_2 = 1$ ,  $a_3 = 4$  og

$$a_n = m(a_{n-1} + a_{n-2}) - a_{n-3}$$

for alle  $n \geq 4$ .

Bestem alle hele tal  $m$  så hvert element i følgen er et kvadrattal.

Language: Danish

Varighed: 4 timer og 30 minutter  
Hver opgave kan give op til 7 point

For at dette skal blive en fair og god konkurrence, er det vigtigt at du ikke taler om eller refererer til opgaverne på internettet eller på sociale medier før søndag d. 19. april.