

Duben 2020

Úloha 4. Permutace celých čísel $1, 2, \dots, m$ se nazývá *svěží*, právě když neexistuje žádné přirozené číslo $k < m$ takové, že prvních k členů permutace je $1, 2, \dots, k$ v nějakém pořadí. Necht' f_m je počet svěžích permutací celých čísel $1, 2, \dots, m$.

Dokažte, že pro všechna $n \geq 3$ platí nerovnost $f_n \geq n \cdot f_{n-1}$.

Například pro $m = 4$ je permutace $(3, 1, 4, 2)$ svěží, zatímco permutace $(2, 3, 1, 4)$ svěží není.

Úloha 5. Uvažujme trojúhelník ABC s $\angle BCA > 90^\circ$. Kružnice Γ opsaná trojúhelníku ABC má poloměr R . Uvnitř úsečky AB leží takový bod P , že $|PB| = |PC|$ a délka úsečky PA je R . Osa úsečky PB protíná Γ v bodech D a E .

Dokažte, že bod P je středem kružnice vepsané trojúhelníku CDE .

Úloha 6. Buď $m > 1$ přirozené číslo. Posloupnost $a_1, a_2, a_3, \dots$ je definována takto: $a_1 = a_2 = 1$, $a_3 = 4$ a pro všechna $n \geq 4$ platí

$$a_n = m(a_{n-1} + a_{n-2}) - a_{n-3}.$$

Určete všechna přirozená čísla m , pro která jsou všechny členy posloupnosti druhými mocninami přirozených čísel.