



Language: Croatian

Day: 2

18. travnja 2020.

**Zadatak 4.** Permutaciju prirodnih brojeva  $1, 2, \dots, m$  zovemo *svježom* ako ne postoji prirodni broj  $k$  takav da je  $k < m$  i da su prvih  $k$  brojeva te permutacije brojevi  $1, 2, \dots, k$  u nekom poretku. Neka je  $f_m$  broj svježih permutacija prirodnih brojeva  $1, 2, \dots, m$ .

Dokaži da je  $f_n \geq n \cdot f_{n-1}$  za sve  $n \geq 3$ .

Na primjer, za  $m = 4$ , permutacija  $(3, 1, 4, 2)$  je svježa, dok permutacija  $(2, 3, 1, 4)$  nije.

**Zadatak 5.** Dan je trokut  $ABC$  u kojem je  $\angle BCA > 90^\circ$ . Opisana kružnica  $\Gamma$  trokuta  $ABC$  ima polumjer  $R$ . U unutrašnjosti dužine  $\overline{AB}$  nalazi se točka  $P$  takva da je  $|PB| = |PC|$  i da je duljina  $|PA|$  jednaka  $R$ . Simetrala dužine  $\overline{PB}$  siječe kružnicu  $\Gamma$  u točkama  $D$  i  $E$ .

Dokaži da je  $P$  središte upisane kružnice trokuta  $CDE$ .

**Zadatak 6.** Neka je  $m > 1$  prirodni broj. Niz  $a_1, a_2, a_3, \dots$  definiran je s  $a_1 = a_2 = 1, a_3 = 4$ , te za sve  $n \geq 4$ :

$$a_n = m(a_{n-1} + a_{n-2}) - a_{n-3}.$$

Odredi sve prirodne brojeve  $m$  za koje su svi članovi tog niza potpuni kvadrati.

Language: Croatian

Vrijeme pisanja: 4 sata i 30 minuta.

Svaki zadatak vrijedi 7 bodova.

Kako bi natjecanje bilo poštено te za sve sudionice podjednako ugodno iskustvo, molimo vas da ne iznosite zadatke i ne govorite o njima na internetu i na društvenim mrežama do subote 18. travnja u 23:59.