



Language: **Bulgarian**

Day: **2**

Април 2020

Задача 4. Една пермутация на числата $1, 2, \dots, m$ се нарича *свежа*, ако не съществува естествено число $k < m$, за което първите k числа в пермутацията са $1, 2, \dots, k$ в някакъв ред. С f_m означаваме броя на свежите пермутации на числата $1, 2, \dots, m$.

Да се докаже, че $f_n \geq n f_{n-1}$ за всяко $n \geq 3$.

Например, когато $m = 4$, пермутацията $(3, 1, 4, 2)$ е свежа, за разлика от пермутацията $(2, 3, 1, 4)$.

Задача 5. Даден е триъгълник ABC , за който $\angle BCA > 90^\circ$. Нека R бъде радиусът на описаната около ABC окръжност Γ . Точката P лежи във вътрешността на отсечката AB и е такава, че $PB = PC$ и $PA = R$. Симетралата на PB пресича Γ в точките D и E .

Да се докаже, че P е центърът на вписаната в триъгълник CDE окръжност.

Задача 6. Нека $m > 1$ е естествено число. Редицата $a_1, a_2, a_3, \dots$ е такава, че $a_1 = a_2 = 1$, $a_3 = 4$, и за всяко $n \geq 4$,

$$a_n = m(a_{n-1} + a_{n-2}) - a_{n-3}.$$

Да се намерят всички естествени числа m , за които всеки член на редицата е точен квадрат на цяло число.

Language: Bulgarian

Време за работа: 4 часа и 30 минути
Всяка задача носи 7 точки

С цел да се запази честността на състезанието, моля не обсъждайте публично и не разпространявайте задачите онлайн или чрез социалните мрежи до 01:00 часа в неделя, 19 април.