EGMO VIRTUAL
Netherlands | 2020
European Girls' Mathematical Olympiad

Language: Arabic

Day: 2

الجمعة ١٧ أبريل ٢٠٢٠

المسألة 4. نقول عن تبديلة الأعداد الصحيحة $1,2,\ldots,m$ بأنها طازجة إذا لم يوجد عدد صحيح موجب $k < m$ بحيث أول k من الأعداد في التبديلة هي $1,2,\ldots,k$ بترتيب ما. لتكن f_m هي عدد الترتيبات الطازجة من الأعداد الصحيحة $1,2,\ldots,m$.

اثبتي أن $f_n \geq n \cdot f_{n-1}$ لكل $n \geq 3$.

فعلى سبيل المثال، إذا كانت $m = 4$، بالتالي التبديلة $(3,1,4,2)$ طازجة، بينما التبديلة $(2,3,1,4)$ ليست طازجة.

المسألة 5. ليكن ABC مثلثًا فيه $\angle BCA > 90°$. الدائرة Γ هي الدائرة المحيطة بالمثلث ABC ونصف قطرها R. توجد نقطة P على القطعة المستقيمة AB بحيث $PB = PC$ ، وطول PA يساوي R. العمود المنصف للقطعة PB يقطع Γ في D و E النقطتين.

اثبت أن P هي مركز الدائرة الداخلي للمثلث CDE .

المسألة 6. لتكن $m > 1$ عدداً صحيحاً. المتتابعة $a_1, a_2, a_3, \ldots$ معرفة كالتالي: $a_1 = a_2 = 1, a_3 = 4$ ، لكل $n \geq 4$ فإن

$$a_n = m(a_{n-1} + a_{n-2}) - a_{n-3}.$$

حدد كل قيم m الصحيحة بحيث كل حد في المتتابعة يكون مربعاً كاملاً.

Language: Arabic

مدة الاختبار: ٤ ساعات و ٣٠ دقيقة
الدرجة العظمى لكل سؤال ٧ درجات.

ليكون هذا الاختبار عادلاً وممتعاً للجميع، نرجو عدم التلميح أو الإشارة بالمسائل على شبكة الانترنت أو وسائل التواصل الاجتماعي حتى يوم الأثنين ١٩ أبريل الساعة ٣:٠٠ صباحاً بتوقيت المملكة العربية السعودية.