

April 2020

Detyra 4. Permutacioni i numrave të plotë $1, 2, \dots, m$ quhet i “freskët” nëse nuk ekziston asnjë numër i plotë pozitiv $k < m$ i tillë që k numrat e parë në permutacion janë $1, 2, \dots, k$ në ndonjë renditje. Le të jetë f_m numri i permutacioneve të “freskëta” të numrave të plotë $1, 2, \dots, m$.

Vërtetoni se $f_n \geq n \cdot f_{n-1}$ për çdo $n \geq 3$.

Për shembull, nëse $m = 4$, atëherë permutacioni $(3,1,4,2)$ është i freskët, ndërsa permutacioni $(2,3,1,4)$ nuk është i freskët.

Detyra 5. Le të jetë dhënë trekëndëshi ABC me $\angle BCA > 90^\circ$. Rrethi i jashtashkruar Γ i trekëndëshit ABC ka rrezen R . Në segmentin AB gjendet pika P , e tillë që $PB = PC$, si dhe gjatësia e PA është R . Simetralja e segmentit PB e pret Γ në pikat D dhe E .

Vërtetoni se P është qendra e rrethit të brendashkruar të trekëndëshit CDE .

Detyra 6. Le të jetë $m > 1$ numër i plotë. Vargu $a_1, a_2, a_3, \dots$ është përkufizuar me $a_1 = a_2 = 1$, $a_3 = 4$, dhe për çdo $n \geq 4$ përmes relacionit

$$a_n = m(a_{n-1} + a_{n-2}) - a_{n-3}.$$

Gjeni të gjithë numrat e plotë m ashtu që secili term i vargut të jetë katror i plotë.

Gjuha: Shqip

Koha: 4 orë e 30 minuta
Secila detyrë vlen 7 pikë

Në mënyrë që gara të jetë fer dhe që të gjithë ta përjetojnë atë, ju lutem mos i diskutoni e as mos i paraqitni detyrat në internet ose në mediat sociale deri të shtunën më 18 prill ora 24:00.