

Prill 2020

Problemi 4. Një përkëmbim i numrave të plotë $1, 2, \dots, m$ quhet *i freskët* në qoftë se nuk gjenden numra të plotë pozitivë $k < m$ të tillë që k numrat e parë të përkëmbimit janë $1, 2, \dots, k$ të vendosur në njëfarë renditjeje. Le të jetë f_m numri i përkëmbimeve të freskët të numrave të plotë $1, 2, \dots, m$. Vërtetoni që $f_n \geq n \cdot f_{n-1}$ për çdo $n \geq 3$.

Për shembull, në qoftë se $m = 4$, atëherë përkëmbimi $(3, 1, 4, 2)$ është i freskët, ndërsa përkëmbimi $(2, 3, 1, 4)$ nuk është i freskët.

Problemi 5. Shqyrtohet trekëndëshi ABC me $\angle BCA > 90^\circ$. Rrethi Γ që i jashtëshkruhet trekëndëshit ABC e ka rrezen R . Gjetet një pikë P në brendësi të segmentit AB e tillë që $PB = PC$ dhe gjatësia e PA është R . Përgjysmorja e segmentit PB pret rrethin Γ në pikat D dhe E .

Vërtetoni që P është qendra e rrethit të brendashkruar trekëndëshit CDE .

Problemi 6. Jepet numri i plotë $m > 1$. Përcaktohet një varg $a_1, a_2, a_3, \dots$ i tillë që $a_1 = a_2 = 1$, $a_3 = 4$, dhe për $n \geq 4$,

$$a_n = m(a_{n-1} + a_{n-2}) - a_{n-3}.$$

Përcaktoni të gjithë numrat e plotë m të tillë që çdo term i vargut është katror i plotë.