

Квітень 2020

Задача 1. Натуральні числа $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{3028}$ задовольняють умову

$$2a_{n+2} = a_{n+1} + 4a_n \text{ for } n = 0, 1, 2, \dots, 3028.$$

Доведіть, що хоча б одне з чисел $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{3028}$ ділиться на 2^{2020} .

Задача 2. Знайдіть усі набори невід'ємних дійсних чисел $(x_1, x_2, \dots, x_{2020})$ такі, що виконано три умови:

- (i) $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_{2020}$;
- (ii) $x_{2020} \leq x_1 + 1$;
- (iii) існує перестановка $(y_1, y_2, \dots, y_{2020})$ набору $(x_1, x_2, \dots, x_{2020})$ така, що

$$\sum_{i=1}^{2020} ((x_i + 1)(y_i + 1))^2 = 8 \sum_{i=1}^{2020} x_i^3.$$

Перестановкою набору називається набір тієї самої довжини з тими самими елементами, але ці елементи можуть йти в довільному порядку. Наприклад: набір $(2, 1, 2)$ є перестановкою набору $(1, 2, 2)$, а ці два набори є перестановками $(2, 2, 1)$. Зауважте, що кожен набір є перестановкою самого себе.

Задача 3. Задано опуклий шестикутник $ABCDEF$ такий, що $\angle A = \angle C = \angle E$, $\angle B = \angle D = \angle F$, та (внутрішні) бісектриси кутів $\angle A$, $\angle C$ і $\angle E$ перетинаються в одній точці.

Доведіть, що (внутрішні) бісектриси кутів $\angle B$, $\angle D$ і $\angle F$ також перетинаються в одній точці.

Зауважте, що $\angle A = \angle FAB$. Інші внутрішні кути шестикутника позначено аналогічно.

Language: Ukrainian

Час виконання: 4 години 30 хвилин
Кожна задача оцінюється в 7 балів

Для того, щоб ця олімпіада була чесною та цікавою, будь ласка, в жодній формі не розголошуйте і не поширяйтеся на ці задачі в інтернеті, соціальних мережах і т. ін. до 01:00 неділі 19 квітня.