Language: **Spanish**

Day: **1**

Abril 2020

Problema 1. Sean a_0, a_1, a_2, $\ldots$, a_{3030} enteros positivos tales que

$$2a_{n+2} = a_{n+1} + 4a_n \quad \text{para todo } n = 0, 1, 2, \ldots, 3028.$$

Demuestre que al menos uno de los enteros a_0, a_1, a_2, $\ldots$, a_{3030} es divisible por 2^{2020}.

Problema 2. Encuentre todas las listas $(x_1, x_2, \ldots, x_{2020})$ de números reales no negativos que satisfacen las siguientes tres condiciones:

(i) $x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_{2020}$;

(ii) $x_{2020} \leq x_1 + 1$;

(iii) existe una permutación $(y_1, y_2, \ldots, y_{2020})$ de $(x_1, x_2, \ldots, x_{2020})$ tal que

$$\sum_{i=1}^{2020} \left((x_i + 1)(y_i + 1)\right)^2 = 8 \sum_{i=1}^{2020} x_i^3.$$

Una permutación de una lista es una lista de la misma longitud, con los mismos elementos pero en un orden cualquiera. Por ejemplo, $(2, 1, 2)$ es una permutación de $(1, 2, 2)$, y ambas son permutaciones de $(2, 2, 1)$. En particular cualquier lista es una permutación de ella misma.

Problema 3. Sea $ABCDEF$ un hexágono convexo tal que $\angle A = \angle C = \angle E$ y $\angle B = \angle D = \angle F$. Además, las bisectrices interiores de los ángulos $\angle A$, $\angle C$ y $\angle E$ son concurrentes.

Demuestre que las bisectrices interiores de los ángulos $\angle B$, $\angle D$ y $\angle F$ también son concurrentes.

La notación $\angle A$ hace referencia al ángulo $\angle FAB$. Lo mismo se aplica a los otros ángulos del hexágono.

Language: Spanish

Tiempo: 4 horas y 30 minutos
Cada problema vale 7 puntos

Para que esta olimpiada sea justa y pueda ser disfrutada de la misma manera por todas, les rogamos no difundir estos problemas, ni en internet, ni en redes sociales, ni de ninguna otra forma, hasta el sábado 18 de abril a las 22:00 UTC (16:00 de Costa Rica y Sinaloa, 17:00 de CDMX, Perú y Ecuador, 18:00 de Chile y 23:59 de España).