EGMO VIRTUAL
Netherlands | 2020
European Girls' Mathematical Olympiad

Language: **Slovenian**

Day: **1**

petek, 17. april 2020

Naloga 1. Naravna števila a_0, a_1, a_2, $\ldots$, a_{3030} zadoščajo pogoju

$$2a_{n+2} = a_{n+1} + 4a_n \quad \text{za } n = 0, 1, 2, \ldots, 3028.$$

Dokaži, da je vsaj eno izmed števil a_0, a_1, a_2, $\ldots$, a_{3030} deljivo z 2^{2020}.

Naloga 2. Poišči vsa taka zaporedja $(x_1, x_2, \ldots, x_{2020})$ nenegativnih realnih števil, za katera veljajo vsi trije naslednji pogoji:

(i) $x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_{2020}$;

(ii) $x_{2020} \leq x_1 + 1$;

(iii) obstaja taka permutacija $(y_1, y_2, \ldots, y_{2020})$ zaporedja $(x_1, x_2, \ldots, x_{2020})$, da velja

$$\sum_{i=1}^{2020} \left((x_i + 1)(y_i + 1)\right)^2 = 8 \sum_{i=1}^{2020} x_i^3.$$

Permutacija zaporedja je zaporedje iste dolžine, ki vsebuje iste člene, le da so členi lahko razporejeni v kateremkoli vrstnem redu. Primer. $(2, 1, 2)$ *je permutacija zaporedja* $(1, 2, 2)$*; obe ti dve zaporedji sta permutaciji zaporedja* $(2, 2, 1)$*. Katerokoli zaporedje je hkrati tudi svoja permutacija.*

Naloga 3. Naj bo $ABCDEF$ konveksen šestkotnik, v katerem velja $\angle A = \angle C = \angle E$ in $\angle B = \angle D = \angle F$ ter kjer so simetrale (notranjih) kotov $\angle A$, $\angle C$ in $\angle E$ konkurentne.

Dokaži, da so simetrale (notranjih) kotov $\angle B$, $\angle D$ in $\angle F$ tudi konkurentne.

Opomba. $\angle A = \angle FAB$*. Ostali notranji koti šestkotnika so zapisani na enak način.*

Premice so konkurentne, če se sekajo v isti točki.

Čas pisanja: 4 ure in 30 minut
Vsaka naloga je vredna 7 točk

Da bo tekmovanje pošteno za vse, ni dovoljeno objaviti ali kakorkoli omeniti nalog na internetu ter socialnih omrežjih do sobote, 18. aprila, do 23:59.