Language: **Slovak**

Day: **1**

Apríl 2020

Úloha 1. Kladné celé čísla a_0, a_1, a_2, ..., a_{3030} spĺňajú

$$2a_{n+2} = a_{n+1} + 4a_n \ \text{ pre } n = 0, 1, 2, \ldots, 3028.$$

Dokážte, že aspoň jedno z čísel a_0, a_1, a_2, ..., a_{3030} je deliteľné 2^{2020}.

Úloha 2. Nájdite všetky postupnosti $(x_1, x_2, \ldots, x_{2020})$ nezáporných reálnych čísel spĺňajúce nasledovné tri podmienky:

(i) $x_1 \le x_2 \le \ldots \le x_{2020}$;

(ii) $x_{2020} \le x_1 + 1$;

(iii) existuje permutácia $(y_1, y_2, \ldots, y_{2020})$ postupnosti $(x_1, x_2, \ldots, x_{2020})$ taká, že

$$\sum_{i=1}^{2020} \left((x_i+1)(y_i+1)\right)^2 = 8\sum_{i=1}^{2020} x_i^3.$$

Permutácia postupnosti je postupnosť rovnakej dĺžky s rovnakými členmi, avšak členy môžu byť v ľubovoľnom poradí. Napríklad, $(2, 1, 2)$ je permutáciou $(1, 2, 2)$, a tiež obe sú permutáciou $(2, 2, 1)$. Každá postupnosť je permutáciou samej seba.

Úloha 3. Nech $ABCDEF$ je konvexný šestuholník taký, že $|\angle A| = |\angle C| = |\angle E|$ a $|\angle B| = |\angle D| = |\angle F|$ a osi (vnútorných) uhlov $\angle A$, $\angle C$ a $\angle E$ sa pretínajú v jednom bode.

Dokážte, že osi (vnútorných) uhlov $\angle B$, $\angle D$ a $\angle F$ sa taktiež pretínajú v jednom bode.

Poznamenajme, že $\angle A = \angle FAB$. Zvyšné vnútorné uhly šesťuholníka sú popísané analogicky.

Language: Slovak

Čas: 4 hodiny a 30 minút
Každá úloha je hodnotená najviac 7 bodmi.

Aby sme túto súťaž spravili spravodlivou a príjemnou pre všetkých, prosíme, nezmieňujte alebo neposkytujte referencie o úlohách na internete alebo sociálnych médiach do nedele 19. apríla, 00:00.