

Kwiecień 2020 r.

Zadanie 1. Dodatnie liczby całkowite $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{3030}$ spełniają warunki

$$2a_{n+2} = a_{n+1} + 4a_n \quad \text{dla } n = 0, 1, 2, \dots, 3028.$$

Udowodnić, że co najmniej jedna spośród liczb $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{3030}$ jest podzielna przez 2^{2020} .

Zadanie 2. Wyznaczyć wszystkie ciągi $(x_1, x_2, \dots, x_{2020})$ nieujemnych liczb rzeczywistych, dla których spełniony jest każdy z następujących trzech warunków:

- (i) $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_{2020}$;
- (ii) $x_{2020} \leq x_1 + 1$;
- (iii) istnieje taka permutacja $(y_1, y_2, \dots, y_{2020})$ ciągu $(x_1, x_2, \dots, x_{2020})$, że

$$\sum_{i=1}^{2020} ((x_i + 1)(y_i + 1))^2 = 8 \sum_{i=1}^{2020} x_i^3.$$

Permutacja ciągu to ciąg o tej samej długości i tych samych wyrazach, przy czym wyrazy te mogą wystąpić w dowolnej kolejności. Przykładowo, ciąg $(2, 1, 2)$ jest permutacją ciągu $(1, 2, 2)$, i oba te ciągi są permutacjami ciągu $(2, 2, 1)$. Odnotujmy, że każdy ciąg jest swoją własną permutacją.

Zadanie 3. W sześciokącie wypukłym $ABCDEF$ zachodzi $\sphericalangle A = \sphericalangle C = \sphericalangle E$ oraz $\sphericalangle B = \sphericalangle D = \sphericalangle F$, a dwusieczne kątów (wewnętrznych) $\sphericalangle A, \sphericalangle C, \sphericalangle E$ przecinają się w jednym punkcie.

Wykazać, że dwusieczne kątów (wewnętrznych) $\sphericalangle B, \sphericalangle D, \sphericalangle F$ również przecinają się w jednym punkcie.

Przyjmujemy $\sphericalangle A = \sphericalangle FAB$. Podobną konwencję stosujemy też dla pozostałych kątów wewnętrznych sześciokąta.