

Април 2020

Задача 1. За природните броеви $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{3030}$ важи следнава релација

$$2a_{n+2} = a_{n+1} + 4a_n, n = 0, 1, 2, \dots, 3028.$$

Докажи дека најмалку еден од броевите $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{3030}$ е делив со 2^{2020} .

Задача 2. Најди ги сите подредени 2020-торки $(x_1, x_2, \dots, x_{2020})$ од ненегативни реални броеви, за кои истовремено важат следните три услови:

(i) $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_{2020}$;

(ii) $x_{2020} \leq x_1 + 1$;

(iii) Постои пермутација $(y_1, y_2, \dots, y_{2020})$ на 2020-торката $(x_1, x_2, \dots, x_{2020})$ така што

$$\sum_{i=1}^{2020} ((x_i + 1)(y_i + 1))^2 = 8 \sum_{i=1}^{2020} x_i^3.$$

Забелешка: Пермутација на подредена n -торка е нова n -торка, со истата должина, која ги содржи истите вредности, но запишани во произволен редослед. На пример, $(2, 1, 2)$ е пермутација на $(1, 2, 2)$, а и двете тројки се пермутации на тројката $(2, 2, 1)$. Секоја подредена n -торка е пермутација самата на себе.

Задача 3. Нека $ABCDEF$ е конвексен шестаголник таков што $\angle A = \angle C = \angle E$, $\angle B = \angle D = \angle F$ и симетралите на внатрешните агли $\angle A$, $\angle C$ и $\angle E$ минуваат низ иста точка.

Докажи дека симетралите на останатите три внатрешни агли $\angle B$, $\angle D$ и $\angle F$ исто така минуваат низ иста точка.

Забелешка: $\angle A = \angle FAB$ и слично за останатите внатрешни агли на шестаголникот.