

2020 m. balandis

**1 uždavinys.** Natūralieji skaičiai  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{3030}$  tenkina lygybę

$$2a_{n+2} = a_{n+1} + 4a_n, \text{ kai } n = 0, 1, 2, \dots, 3028.$$

Įrodykite, kad bent vienas iš skaičių  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{3030}$  dalijasi iš  $2^{2020}$ .

**2 uždavinys.** Nustatykite visas tokias realiųjų neneigiamų skaičių (baigtines) sekas  $(x_1, x_2, \dots, x_{2020})$ , kurios tenkina visas tris sąlygas:

(i)  $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_{2020}$ ;

(ii)  $x_{2020} \leq x_1 + 1$ ;

(iii) egzistuoja toks sekos  $(x_1, x_2, \dots, x_{2020})$  kėlinys  $(y_1, y_2, \dots, y_{2020})$ , kad

$$\sum_{i=1}^{2020} ((x_i + 1)(y_i + 1))^2 = 8 \sum_{i=1}^{2020} x_i^3.$$

*Sekos kėliniu vadinama to paties ilgio ir iš tų pačių narių sudaryta seka, gaunama surašant duotosios sekos narius bet kokia norima tvarka. Pavyzdžiui,  $(2, 1, 2)$  yra  $(1, 2, 2)$  kėlinys, o abi šios sekos yra  $(2, 2, 1)$  kėliniai. Sekos kėlinys yra ir pati ta seka.*

**3 uždavinys.** Iškilasis šešiakampis  $ABCDEF$  tenkina sąlygas  $\angle A = \angle C = \angle E$  ir  $\angle B = \angle D = \angle F$ , o jo kampų  $A, C$  ir  $E$  (vidinės) pusiaukampinės kertasi viename taške.

Įrodykite, kad kampų  $B, D$  ir  $F$  (vidinės) pusiaukampinės taip pat kertasi viename taške.

Čia  $\angle A = \angle FAB$ . Likę šešiakampio vidiniai kampai apibrėžiami analogiškai.