

Ceturtdien, 2020. gada 16. aprīlī.

1. uzdevums. Naturāliem skaitļiem $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{3030}$ izpildās sakarības:

$$2a_{n+2} = a_{n+1} + 4a_n, \text{ katram } n = 0, 1, 2, \dots, 3028.$$

Pierādīt, ka vismaz viens no skaitļiem $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{3030}$ dalās ar 2^{2020} .

2. uzdevums. Atrast visus tādus nenegatīvu reālu skaitļu sarakstus $(x_1, x_2, \dots, x_{2020})$, kuriem vienlaicīgi izpildās šādi nosacījumi:

(i) $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_{2020}$;

(ii) $x_{2020} \leq x_1 + 1$;

(iii) eksistē tāda skaitļu saraksta $(x_1, x_2, \dots, x_{2020})$ permutācija $(y_1, y_2, \dots, y_{2020})$, kurai

$$\sum_{i=1}^{2020} ((x_i + 1)(y_i + 1))^2 = 8 \sum_{i=1}^{2020} x_i^3.$$

Skaitļu saraksta permutācija ir tāda paša garuma skaitļu saraksts, ar tiem pašiem elementiem, kuri var būt sakārtoti jebkādā secībā. Piemēram, $(2, 1, 2)$ ir saraksta $(1, 2, 2)$ permutācija, un tās abas ir saraksta $(2, 2, 1)$ permutācijas. Ievērojiet, ka jebkurš saraksts ir permutācija arī pats sev.

3. uzdevums. Izliktā sešstūrī $ABCDEF$ $\angle A = \angle C = \angle E$ un $\angle B = \angle D = \angle F$. Leņķu $\angle A, \angle C$ un $\angle E$ (iekšējās) bisektrises krustojas vienā punktā.

Pierādīt, ka leņķu $\angle B, \angle D$ un $\angle F$ (iekšējās) bisektrises arī krustojas vienā punktā.

Piezīme. $\angle A = \angle FAB$ un visi pārējie sešstūra iekšējie leņķi ir apzīmēti līdzīgā veidā.