

Aprile 2020

Problema 1. Gli interi positivi $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{3030}$ soddisfano

$$2a_{n+2} = a_{n+1} + 4a_n \text{ per } n = 0, 1, 2, \dots, 3028.$$

Dimostrare che almeno uno dei numeri $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{3030}$ è divisibile per 2^{2020} .

Problema 2. Trovare tutte le liste $(x_1, x_2, \dots, x_{2020})$ di reali non negativi che soddisfano le seguenti tre proprietà:

- (i) $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_{2020}$;
- (ii) $x_{2020} \leq x_1 + 1$;
- (iii) esiste una permutazione $(y_1, y_2, \dots, y_{2020})$ di $(x_1, x_2, \dots, x_{2020})$ tale che

$$\sum_{i=1}^{2020} ((x_i + 1)(y_i + 1))^2 = 8 \sum_{i=1}^{2020} x_i^3.$$

Una permutazione di una lista è una lista della stessa lunghezza, con gli stessi elementi che però possono comparire in un qualsiasi ordine. Per esempio, $(2, 1, 2)$ è una permutazione di $(1, 2, 2)$, e sono entrambe permutazioni di $(2, 2, 1)$. In particolare ogni lista è una permutazione di se stessa.

Problema 3. Sia $ABCDEF$ un esagono convesso tale che $\angle A = \angle C = \angle E$ e $\angle B = \angle D = \angle F$ e tale che le bisettrici (interne) degli angoli $\angle A$, $\angle C$, e $\angle E$ concorrono.

Dimostrare che anche le bisettrici (interne) degli angoli $\angle B$, $\angle D$, e $\angle F$ concorrono.

Indichiamo $\angle A = \angle FAB$. Gli altri angoli interni dell'esagono sono indicati con notazione analoga.