

יום חמישי, 16 באפריל, 2020

שאלה 1. השלמים החיוביים $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{3030}$ מקיימים

$$2a_{n+2} = a_{n+1} + 4a_n \quad \text{לכל } n = 0, 1, 2, \dots, 3028.$$

הוכיחי כי לפחות אחד מהמספרים $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{3030}$ מתחלק ב- 2^{2020} .

שאלה 2. מצאי את כל הרשימות $(x_1, x_2, \dots, x_{2020})$ של מספרים ממשיים אי-שליליים כך שכל שלושת התנאים הבאים מתקיימים:

$$(i) \quad x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_{2020}$$

$$(ii) \quad x_{2020} \leq x_1 + 1$$

(iii) קיימת תמורה $(y_1, \dots, y_{2020})$ של $(x_1, \dots, x_{2020})$ עבורה מתקיים

$$\sum_{i=1}^{2020} ((x_i + 1)(y_i + 1))^2 = 8 \sum_{i=1}^{2020} x_i^3$$

(תמורה של רשימה הינה רשימה באותו אורך, עם אותם האיברים, אך לאיברים מותר להיות בכל סדר. לדוגמה, $(2, 1, 2)$ הינה תמורה של $(1, 2, 2)$, ושתייהן תמורות של $(2, 2, 1)$. שימי לב שכל רשימה הינה תמורה של עצמה.)

שאלה 3. יהא $ABCDEF$ משושה קמור בו מתקיים $\sphericalangle A = \sphericalangle C = \sphericalangle E$ וגם $\sphericalangle B = \sphericalangle D = \sphericalangle F$, ובנוסף חוצי הזוויות (הפנימיים) של זוויות הקודקודים A, C ו- E נפגשים בנקודה אחת.

הוכיחי כי גם חוצי הזוויות (הפנימיים) של זוויות הקודקודים B, D ו- F נפגשים בנקודה אחת.

(הזווית בקודקוד A הינה $\sphericalangle FAB$. הזוויות הפנימיות האחרות של המשושה מוגדרות באופן דומה.)

Language: Hebrew

משך הבחינה 4 שעות ו-30 דקות
כל שאלה שווה 7 נקודות

על מנת שהתחרות תהיה הוגנת ומהנה עבור כולן, אנא אל תצייני או תתייחסי לשאלות באינטרנט או ברשתות החברתיות עד ליום ראשון ה-19 באפריל, בשעה 01:00 (לפנות בוקר, שעון ישראל).