

Απρίλιος 2020

Πρόβλημα 1. Οι θετικοί ακέραιοι $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{3028}$ ικανοποιούν τη συνθήκη

$$2a_{n+2} = a_{n+1} + 4a_n \quad \text{για } n = 0, 1, 2, \dots, 3028.$$

Να αποδειχθεί ότι τουλάχιστον ένας από τους αριθμούς $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{3028}$ διαιρείται με το 2^{2020} .

Πρόβλημα 2. Να βρείτε όλες τις λίστες $(x_1, x_2, \dots, x_{2020})$ μη αρνητικών πραγματικών αριθμών τέτοιων ώστε να ικανοποιούνται όλες οι παρακάτω συνθήκες:

- (i) $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_{2020}$,
- (ii) $x_{2020} \leq x_1 + 1$,
- (iii) υπάρχει μετάθεση $(y_1, y_2, \dots, y_{2020})$ της $(x_1, x_2, \dots, x_{2020})$ τέτοια ώστε

$$\sum_{i=1}^{2020} ((x_i + 1)(y_i + 1))^2 = 8 \sum_{i=1}^{2020} x_i^3.$$

Μετάθεση μιας λίστας είναι μια λίστα ιδίου μήκους, με τα ίδια στοιχεία, τα οποία επιτρέπεται να είναι σε οποιαδήποτε σειρά. Για παράδειγμα η $(2, 1, 2)$ είναι μια μετάθεση της $(1, 2, 2)$. Επιπλέον και οι δύο είναι μεταθέσεις της $(2, 2, 1)$. Παρατηρήστε ότι κάθε λίστα είναι μετάθεση του εαυτού της.

Πρόβλημα 3. Έστω κυρτό εξάγωνο $ABCDEF$ τέτοιο ώστε $\angle A = \angle C = \angle E$ και $\angle B = \angle D = \angle F$ και οι (εσωτερικές) διχοτόμοι των $\angle A$, $\angle C$, και $\angle E$ συντρέχουν.

Να αποδειχθεί ότι οι (εσωτερικές) διχοτόμοι των $\angle B$, $\angle D$, και $\angle F$ επίσης συντρέχουν.

Παρατηρήστε ότι $\angle A = \angle FAB$. Οι άλλες εσωτερικές γωνίες του εξαγώνου ορίζονται ομοίως.