EGMO VIRTUAL
Netherlands | 2020
European Girls' Mathematical Olympiad

Language: **German**

Day: **1**

April 2020

Aufgabe 1. Die positiven ganzen Zahlen a_0, a_1, a_2, ..., a_{3030} erfüllen

$$2a_{n+2} = a_{n+1} + 4a_n \quad \text{für } n = 0, 1, 2, \ldots, 3028.$$

Beweise, dass mindestens eine der Zahlen a_0, a_1, a_2, ..., a_{3030} durch 2^{2020} teilbar ist.

Aufgabe 2. Bestimme alle Tupel $(x_1, x_2, \ldots, x_{2020})$ nicht-negativer reeller Zahlen, für die folgende drei Bedingungen alle erfüllt sind:

(i) $x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_{2020}$;

(ii) $x_{2020} \leq x_1 + 1$;

(iii) es existiert eine Permutation $(y_1, y_2, \ldots, y_{2020})$ von $(x_1, x_2, \ldots, x_{2020})$, für die

$$\sum_{i=1}^{2020} \left((x_i + 1)(y_i + 1)\right)^2 = 8 \sum_{i=1}^{2020} x_i^3$$

gilt.

Eine Permutation eines Tupels ist ein Tupel derselben Länge mit denselben Einträgen, wobei die Einträge in beliebiger Reihenfolge vorkommen dürfen. Zum Beispiel ist $(2, 1, 2)$ *eine Permutation von* $(1, 2, 2)$*, und beide sind Permutationen von* $(2, 2, 1)$*. Beachte, dass jedes Tupel eine Permutation von sich selbst ist.*

Aufgabe 3. Sei $ABCDEF$ ein konvexes Sechseck, sodass $\measuredangle A = \measuredangle C = \measuredangle E$ und $\measuredangle B = \measuredangle D = \measuredangle F$ gelten und die (inneren) Winkelhalbierenden (Winkelsymmetralen) der Winkel $\measuredangle A$, $\measuredangle C$ und $\measuredangle E$ sich in einem Punkt schneiden.

Zeige, dass die (inneren) Winkelhalbierenden (Winkelsymmetralen) der Winkel $\measuredangle B$, $\measuredangle D$ und $\measuredangle F$ sich ebenfalls in einem Punkt schneiden.

Hinweis: Wir schreiben $\measuredangle A = \measuredangle FAB$*. Die anderen Winkel des Sechsecks sind analog bezeichnet.*

Language: German

Zeit: 4 Stunden und 30 Minuten
Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

Um allen Teilnehmerinnen einen fairen und unterhaltsamen Wettbewerb zu ermöglichen, bitten wir alle, die Aufgaben bis Samstag, 18. April 2020, 23:59 keinesfalls im Internet oder in öffentlichen sozialen Medien weiterzuleiten oder zu besprechen.