

აპრილი, 2020

ამოცანა 1. ნატურალური $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{3030}$ რიცხვები აკმაყოფილებენ შემდეგ პირობას:

$$2a_{n+2} = a_{n+1} + 4a_n, \text{ სადაც, } n = 0, 1, 2, \dots, 3028.$$

დაამტკიცეთ, რომ $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{3030}$ რიცხვებიდან, ერთი მაინც იყოფა 2^{2020} -ზე.

ამოცანა 2. იპოვეთ, არაუარყოფითი ნამდვილი რიცხვებისგან შედგენილი ყველა $(x_1, x_2, \dots, x_{2020})$ კრებული, რომელთათვისაც სრულდება შემდეგი სამი პირობა:

- (i) $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_{2020}$;
- (ii) $x_{2020} \leq x_1 + 1$;
- (iii) არსებობს კრებული $(y_1, y_2, \dots, y_{2020})$ რომელიც წარმოადგენს $(x_1, x_2, \dots, x_{2020})$ კრებულის ისეთ გადანაცვლებას, რომ:

$$\sum_{i=1}^{2020} ((x_i + 1)(y_i + 1))^2 = 8 \sum_{i=1}^{2020} x_i^3.$$

კრებულის გადანაცვლება არის კრებული იგივე სიგრძით, რომელსაც აქვს იგივე ელემენტები, მაგრამ ამ ელემენტების თანმიმდევრობა შეიძლება იყოს ნებისმიერი. მაგალითად, $(2, 1, 2)$ წარმოადგენს $(1, 2, 2)$ -ის გადანაცვლებას და ისინი ორივენი წარმოადგენენ $(2, 2, 1)$ -ის გადანაცვლებას. ასევე, ყოველი კრებული არის საკუთარი თავის გადანაცვლება.

ამოცანა 3. $ABCDEF$ ამოხეილ ექვსკუთხედში $\angle A = \angle C = \angle E$ და $\angle B = \angle D = \angle F$. ასევე, მისი $\angle A$, $\angle C$ და $\angle E$ კუთხეების შიგა ბისექტრისები ერთ წერტილზე იკვეთება. დაამტკიცეთ, რომ, ასევე ერთ წერტილზე გადაიკვეთება $\angle B$, $\angle D$ და $\angle F$ კუთხეების შიგა ბისექტრისებიც.

$\angle A = \angle FAB$. ექვსკუთხედის სხვა შიგა კუთხეებიც ანალოგიურად განისაზღვრება.

Language: Georgian

სამუშაო დრო: 4 საათი და 30 წუთი
ყოველი ამოცანა ფასდება 7 ქულით

გთხოვთ, 19 აპრილის 02:00 საათამდე, ნუ მოახდენთ ამოცანების აფიშირებას ინტერნეტით ან ნებისმიერი სხვა გზით, რომელიც გახდის მათ საჯაროს. რადგან, ჩვენ ყველამ ერთად უნდა ვიზრუნოთ, რომ ოლიმპიადა ჩატარდეს ყველასთვის სამართლიან და თანასწორ პირობებში.