Language: **French**

Day: **1**

Avril 2020

Problème 1. Les entiers strictement positifs a_0, a_1, a_2, $\ldots$, a_{3030} satisfont

$$2a_{n+2} = a_{n+1} + 4a_n \quad \text{pour } n = 0, 1, 2, \ldots, 3028.$$

Démontrer qu'au moins un des nombres a_0, a_1, a_2, $\ldots$, a_{3030} est divisible par 2^{2020}.

Problème 2. Trouver toutes les listes $(x_1, x_2, \ldots, x_{2020})$ de réels positifs ou nuls satisfaisant simultanément aux trois conditions suivantes :

(i) $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \cdots \leqslant x_{2020}$;

(ii) $x_{2020} \leqslant x_1 + 1$;

(iii) il existe une permutation $(y_1, y_2, \ldots, y_{2020})$ de $(x_1, x_2, \ldots, x_{2020})$ telle que

$$\sum_{i=1}^{2020} \left((x_i + 1)(y_i + 1)\right)^2 = 8 \sum_{i=1}^{2020} x_i^3.$$

Une permutation d'une liste est une liste de la même longueur, composée des mêmes éléments, mais qui peuvent être dans n'importe quel ordre. Par exemple, $(2, 1, 2)$ *est une permutation de* $(1, 2, 2)$*, et elles sont toutes les deux permutation de* $(2, 2, 1)$*. En particulier, toute liste est une permutation d'elle-même.*

Problème 3. Soit $ABCDEF$ un hexagone convexe tel que $\widehat{A} = \widehat{C} = \widehat{E}$, $\widehat{B} = \widehat{D} = \widehat{F}$ et les bissectrices (intérieures) de $\widehat{A}$, $\widehat{C}$ et $\widehat{E}$ soient concourantes.

Prouver que les bissectrices (intérieures) de $\widehat{B}$, $\widehat{D}$ et $\widehat{F}$ sont aussi concourantes.

Remarque : $\widehat{A} = \widehat{FAB}$ *et les autres angles intérieurs de l'hexagone sont décrits de manière semblable.*

Durée: 4 heures et 30 minutes
Chaque problème vaut 7 points

Pour que cette compétition reste juste et plaisante pour chacune, évitez de publier ou de discuter des problèmes sur internet ou sur les réseaux sociaux avant le samedi 18 avril 23h59 CEST.