

Huhtikuu 2020

Tehtävä 1. Positiivisilla kokonaisluvuilla $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{3030}$ pätee

$$2a_{n+2} = a_{n+1} + 4a_n, \text{ kun } n = 0, 1, 2, \dots, 3028.$$

Osoita, että ainakin yksi luvuista $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{3030}$ on jaollinen luvulla 2^{2020} .

Tehtävä 2. Etsi kaikki ei-negatiivisten reaalilukujen jonot $(x_1, x_2, \dots, x_{2020})$, jotka toteuttavat jokaisen seuraavista kolmesta ehdosta:

(i) $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_{2020}$;

(ii) $x_{2020} \leq x_1 + 1$;

(iii) on olemassa jonon $(x_1, x_2, \dots, x_{2020})$ permutaatio $(y_1, y_2, \dots, y_{2020})$, jolle pätee

$$\sum_{i=1}^{2020} ((x_i + 1)(y_i + 1))^2 = 8 \sum_{i=1}^{2020} x_i^3.$$

Jonon permutaatio on jono, joka on yhtä pitkä kuin alkuperäinen jono ja jossa on samat alkiot, mutta alkiot voivat olla eri järjestyksessä. Esimerkiksi jono $(2, 1, 2)$ on jonon $(1, 2, 2)$ permutaatio ja nämä molemmat ovat jonon $(2, 2, 1)$ permutaatioita. Huomaa, että mikä tahansa jono on itsensä permutaatio.

Tehtävä 3. Olkoon $ABCDEF$ konvekssi kuusikulmio, jossa on $\angle A = \angle C = \angle E$ ja $\angle B = \angle D = \angle F$ sekä (sisä)kulmien $\angle A, \angle C$ ja $\angle E$ puolittajat leikkaavat samassa pisteessä.

Osoita, että myös (sisä)kulmien $\angle B, \angle D$ ja $\angle F$ puolittajat leikkaavat toisensa yhdessä pisteessä.

Huomaa, että $\angle A = \angle FAB$. Muut kuusikulmion sisäkulmat on määritelty samalla tavalla.

Language: Finnish

Aikaa on 4 tuntia ja 30 minuuttia
Jokainen tehtävä on 7 pisteen arvoinen

Jotta kilpailu olisi reilu ja mukava kaikille, älä mainitse tehtäviä tai viittaa tehtäviin internetissä tai sosiaalisessa mediassa ennen sunnuntaita 19. huhtikuuta klo 01:00.