

April 2020

Opgave 1. De (strikt) positieve gehele getallen $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{3030}$ voldoen aan de volgende eigenschap:

$$2a_{n+2} = a_{n+1} + 4a_n \quad \text{voor } n = 0, 1, 2, \dots, 3028.$$

Bewijs dat ten minste een van de getallen $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{3030}$ deelbaar is door 2^{2020} .

Opgave 2. Vind alle rijtjes $(x_1, x_2, \dots, x_{2020})$ van reële getallen groter dan of gelijk aan 0 zodat aan de volgende drie voorwaarden voldaan wordt:

- (i) $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_{2020}$;
- (ii) $x_{2020} \leq x_1 + 1$;
- (iii) Er bestaat een permutatie $(y_1, y_2, \dots, y_{2020})$ van $(x_1, x_2, \dots, x_{2020})$ zodat

$$\sum_{i=1}^{2020} ((x_i + 1)(y_i + 1))^2 = 8 \sum_{i=1}^{2020} x_i^3.$$

Een permutatie van een rijtje is een rijtje met dezelfde lengte en met dezelfde getallen, zodat elk getal in beide rijtjes even vaak voorkomt. De volgorde van de getallen mag wel anders zijn. Zo is bijvoorbeeld $(2, 1, 2)$ een permutatie van $(1, 2, 2)$, en ze zijn beide permutaties van $(2, 2, 1)$. Merk op: elk rijtje is ook een permutatie van zichzelf.

Opgave 3. Laat $ABCDEF$ een convexe zeshoek zijn zodat $\angle A = \angle C = \angle E$ en $\angle B = \angle D = \angle F$ en zodat de binnenbissectrices (binnendeellijnen) van de hoeken $\angle A, \angle C$ en $\angle E$ door een punt gaan.

Bewijs dat de binnenbissectrices (binnendeellijnen) van de hoeken $\angle B, \angle D$ en $\angle F$ ook door een punt gaan.

Merk op dat $\angle A = \angle FAB$. De andere binnenhoeken van de zeshoek worden op dezelfde manier beschreven. De zeshoek is convex als de binnenhoeken $\angle A, \angle B, \angle C, \angle D, \angle E$ en $\angle F$ allemaal kleiner zijn dan 180° .