

16. april 2020

Opgave 1. De positive hele tal $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{3030}$ opfylder at

$$2a_{n+2} = a_{n+1} + 4a_n \text{ for } n = 0, 1, 2, \dots, 3028.$$

Vis at mindst et af tallene $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{3030}$ er deleligt med 2^{2020} .

Opgave 2. Find alle lister $(x_1, x_2, \dots, x_{2020})$ af ikke-negative reelle tal så følgende tre betingelser er opfyldt:

- (i) $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_{2020}$;
- (ii) $x_{2020} \leq x_1 + 1$;
- (iii) der findes en permutation $(y_1, y_2, \dots, y_{2020})$ af $(x_1, x_2, \dots, x_{2020})$ så

$$\sum_{i=1}^{2020} ((x_i + 1)(y_i + 1))^2 = 8 \sum_{i=1}^{2020} x_i^3.$$

En permutation af en liste er en liste med samme længde og med de samme elementer, men hvor elementerne kan være i en vilkårlig rækkefølge. For eksempel er $(2, 1, 2)$ en permutation af $(1, 2, 2)$, og de er begge permutationer af $(2, 2, 1)$. Bemærk at enhver liste er en permutation af sig selv.

Opgave 3. Lad $ABCDEF$ være en konveks sekskant hvor $\angle A = \angle C = \angle E$ og $\angle B = \angle D = \angle F$, og hvor vinkelhalveringslinjerne til vinklerne $\angle A, \angle C$ og $\angle E$ skærer hinanden i samme punkt.

Vis at vinkelhalveringslinjerne til vinklerne $\angle B, \angle D$ og $\angle F$ da også må skære hinanden i samme punkt.

Bemærk at $\angle A = \angle FAB$. De andre vinkler i sekskanten er beskrevet på samme måde.