

Duben 2020

Úloha 1. Přirozená čísla $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{3030}$ splňují

$$2a_{n+2} = a_{n+1} + 4a_n \text{ pro } n = 0, 1, 2, \dots, 3028.$$

Dokažte, že aspoň jedno z čísel $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{3030}$ je dělitelné 2^{2020} .

Úloha 2. Najděte všechny posloupnosti $(x_1, x_2, \dots, x_{2020})$ nezáporných reálných čísel splňující současně následující tři podmínky:

- (i) $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_{2020}$;
- (ii) $x_{2020} \leq x_1 + 1$;
- (iii) existuje taková permutace $(y_1, y_2, \dots, y_{2020})$ posloupnosti $(x_1, x_2, \dots, x_{2020})$, že

$$\sum_{i=1}^{2020} ((x_i + 1)(y_i + 1))^2 = 8 \sum_{i=1}^{2020} x_i^3.$$

Permutace posloupnosti je posloupnost téže délky se stejnými členy, které však mohou být v libovolném pořadí. Například $(2, 1, 2)$ je permutací $(1, 2, 2)$ a obě jsou permutacemi posloupnosti $(2, 2, 1)$. Speciálně, každá posloupnost je permutací sebe sama.

Úloha 3. Nechť $ABCDEF$ je konvexní šestiúhelník splňující $|\sphericalangle FAB| = |\sphericalangle BCD| = |\sphericalangle DEF|$ a $|\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle CDE| = |\sphericalangle EFA|$ a ve kterém osy vnitřních úhlů u vrcholů A, C a E procházejí tímž bodem.

Dokažte, že také osy vnitřních úhlů u vrcholů B, D a F procházejí společným bodem.

Zde $|\sphericalangle FAB|$ značí velikost úhlu FAB . Podobně jsou značeny velikosti ostatních vnitřních úhlů šestiúhelníka.