



Language: Croatian

Day: 1

17. travnja 2020.

Zadatak 1. Za prirodne brojeve $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{3030}$ vrijedi

$$2a_{n+2} = a_{n+1} + 4a_n \quad \text{za } n = 0, 1, 2, \dots, 3028.$$

Dokaži da je barem jedan od brojeva $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{3030}$ djeljiv s 2^{2020} .

Zadatak 2. Odredi sve liste $(x_1, x_2, \dots, x_{2020})$ nenegativnih realnih brojeva za koje su ispunjena sljedeća tri uvjeta (sva tri):

- (i) $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_{2020}$;
- (ii) $x_{2020} \leq x_1 + 1$;
- (iii) postoji permutacija $(y_1, y_2, \dots, y_{2020})$ liste $(x_1, x_2, \dots, x_{2020})$ takva da vrijedi

$$\sum_{i=1}^{2020} ((x_i + 1)(y_i + 1))^2 = 8 \sum_{i=1}^{2020} x_i^3.$$

Permutacija liste je lista iste duljine, s istim elementima, ali elementi mogu biti u bilo kojem poretku. Na primjer, $(2, 1, 2)$ je permutacija od $(1, 2, 2)$; i jedno i drugo su permutacije od $(2, 2, 1)$. Uoči da je svaka lista permutacija same sebe.

Zadatak 3. Neka je $ABCDEF$ konveksni šesterokut takav da vrijedi $\angle A = \angle C = \angle E$ i $\angle B = \angle D = \angle F$, a (unutarnje) simetrale kutova $\angle A, \angle C$ i $\angle E$ se sijeku u jednoj točki.

Dokaži da se (unutarnje) simetrale kutova $\angle B, \angle D$ i $\angle F$ moraju također sjeći u jednoj točki.

Označavamo $\angle A = \angle FAB$. Slično vrijedi za ostale unutarnje kutove šesterokuta.

Language: Croatian

Vrijeme pisanja: 4 sata i 30 minuta.
Svaki zadatak vrijedi 7 bodova.

Kako bi natjecanje bilo pošteno te za sve sudionice podjednako ugodno iskustvo, molimo vas da ne iznosite zadatke i ne govorite o njima na internetu i na društvenim mrežama do subote 18. travnja u 23:59.