

Април 2020

Задача 1. Естествените числа $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{3030}$ са такива, че

$$2a_{n+2} = a_{n+1} + 4a_n \text{ за } n = 0, 1, 2, \dots, 3028.$$

Да се докаже, че поне едно от числата $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{3030}$ се дели на 2^{2020} .

Задача 2. Да се намерят всички 2020-орки $(x_1, x_2, \dots, x_{2020})$ от неотрицателни реални числа, които изпълняват всяко от следните три условия:

(1) $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_{2020}$;

(2) $x_{2020} \leq x_1 + 1$;

(3) съществува пермутация $(y_1, y_2, \dots, y_{2020})$ на $(x_1, x_2, \dots, x_{2020})$, такава, че

$$\sum_{i=1}^{2020} ((x_i + 1)(y_i + 1))^2 = 8 \sum_{i=1}^{2020} x_i^3.$$

Ако n е естествено число, пермутация на дадена n -орка е n -орка, съдържаща същите елементи в някакъв ред. Например $(2, 1, 2)$ е пермутация на $(1, 2, 2)$. И двете от тях са пермутации на $(2, 2, 1)$. Всяка n -орка е пермутация на самата себе си.

Задача 3. Даден е изпъкнал шестоъгълник $ABCDEF$, за който $\sphericalangle A = \sphericalangle C = \sphericalangle E$ и $\sphericalangle B = \sphericalangle D = \sphericalangle F$ и вътрешните ъглополовящи на $\sphericalangle A$, $\sphericalangle C$ и $\sphericalangle E$ се пресичат в една точка.

Да се докаже, че вътрешните ъглополовящи на $\sphericalangle B$, $\sphericalangle D$ и $\sphericalangle F$ също се пресичат в една точка.

Забележка: $\sphericalangle A = \sphericalangle FAB$. Останалите ъгли на шестоъгълника могат да бъдат записани по подобен начин.