

april 2020

Zadatak 1. Prirodni brojevi $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{3030}$ zadovoljavaju

$$2a_{n+2} = a_{n+1} + 4a_n \text{ za } n = 0, 1, 2, \dots, 3028.$$

Dokazati da je bar jedan od brojeva $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{3030}$ djeljiv sa 2^{2020} .

Zadatak 2. Naći sve uređene liste $(x_1, x_2, \dots, x_{2020})$ nenegativnih realnih brojeva tako da su zadovoljena sva tri sljedeća uslova:

- (i) $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_{2020}$;
- (ii) $x_{2020} \leq x_1 + 1$;
- (iii) postoji permutacija $(y_1, y_2, \dots, y_{2020})$ od $(x_1, x_2, \dots, x_{2020})$ tako da vrijedi

$$\sum_{i=1}^{2020} ((x_i + 1)(y_i + 1))^2 = 8 \sum_{i=1}^{2020} x_i^3.$$

Permutacija liste je lista iste dužine, sa istim elementima, pri čemu ti elementi smiju biti u bilo kojem poretku. Na primjer, $(2,1,2)$ je permutacija od $(1,2,2)$, a obe te liste su permutacija od $(2,2,1)$. Također, svaka lista je permutacija same sebe.

Zadatak 3. Neka je $ABCDEF$ konveksni šestougao takav da vrijedi $\angle A = \angle C = \angle E$ i $\angle B = \angle D = \angle F$ i (unutrašnje) simetrale uglova $\angle A, \angle C,$ i $\angle E$ se sijeku u jednoj tački.

Dokazati da se (unutrašnje) simetrale uglova $\angle B, \angle D,$ i $\angle F$ također sijeku u jednoj tački.

Napomena: $\angle A = \angle FAB$. Slično vrijedi za ostale unutrašnje uglove šestougla.

Language: Bosnian

Vrijeme: 4 sata i 30 minuta
Svaki zadatak vrijedi 7 bodova

Kako bi ovo bilo pošteno i ugodno takmičenje za sviju, molimo vas da ne spominjete i ne objavljujete zadatke na internetu ili socijalnim mrežama do subote 18. aprila u 23:59.