

Prill 2020

Detyra 1. Numrat e plotë pozitivë $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{3030}$ e plotësojnë kushtin:

$$2a_{n+2} = a_{n+1} + 4a_n \text{ për } n = 0, 1, 2, \dots, 3028.$$

Vërtetoni se së paku njëri nga numrat $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{3030}$ është i plotpjesëtueshëm me 2^{2020} .

Detyra 2. Gjeni të gjithë numrat realë jonegativë $(x_1, x_2, \dots, x_{2020})$, në mënyrë që të plotësohen të tri kushtet e mëposhtme:

- (i) $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_{2020}$;
- (ii) $x_{2020} \leq x_1 + 1$;
- (iii) Ekziston permutacioni $(y_1, y_2, \dots, y_{2020})$ i $(x_1, x_2, \dots, x_{2020})$ i tillë që

$$\sum_{i=1}^{2020} ((x_i + 1)(y_i + 1))^2 = 8 \sum_{i=1}^{2020} x_i^3.$$

Permutacion i një vargu është një varg i gjatësisë së njëjtë, me elementet e njëjta ku elementet lejohet të jenë në çfarëdo renditje. Për shembull, $(2, 1, 2)$ është permutacion i $(1, 2, 2)$, dhe këto të dyja janë permutacione të $(2, 2, 1)$. Vëreni se çdo varg është permutacion i vetvetes.

Detyra 3. Le të jetë $ABCDEF$ një gjashtëkëndësh i rregullt konveks i tillë që $\angle A = \angle C = \angle E$ dhe $\angle B = \angle D = \angle F$, dhe që simetralet e këndeve të brendshme të $\angle A$, $\angle C$, dhe $\angle E$ të priten në një pikë.

Vërtetoni se simetralet e këndeve të brendshme të $\angle B$, $\angle D$, dhe $\angle F$, priten në një pikë.

Vëreni se $\angle A = \angle FAB$. Këndet tjera të brendshme të gjashtëkëndëshit janë të përshkruara në mënyrë të ngjashme.

Gjuha: Shqip

Koha: 4 orë e 30 minuta
Secila detyrë vlen 7 pikë

Në mënyrë që gara të jetë fer dhe që të gjithë ta përjetojnë atë, ju lutem mos i diskutoni e as mos i paraqitni detyrat në internet ose në mediat sociale deri të shtunën më 18 prill ora 24:00.