



Sreda, 10. april 2019

Naloga 4. Naj bo ABC trikotnik s središčem včrtane krožnice v I . Krožnica skozi B tangenta na AI v I seka stranico AB ponovno v P . Krožnica skozi C tangenta na AI v I seka stranico AC ponovno v Q . Dokaži, da je PQ tangenta na krožnico včrtano trikotniku ABC .

Naloga 5. Naj bo $n \geq 2$ naravno število in naj bodo a_1, a_2, \dots, a_n naravna števila. Pokaži, da obstajajo naravna števila b_1, b_2, \dots, b_n , ki zadoščajo naslednjim trem pogojem:

(A) $a_i \leq b_i$ za $i = 1, 2, \dots, n$,

(B) ostanki števil b_1, b_2, \dots, b_n pri deljenju z n so paroma različni in

(C) $b_1 + \dots + b_n \leq n \left(\frac{n-1}{2} + \left\lfloor \frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \right\rfloor \right)$.

(V tem primeru $\lfloor x \rfloor$ označuje celi del realnega števila x , to je največje celo število, ki ni večje od x .)

Naloga 6. Alina nariše na krožnici 2019 tetiv, katerih krajišča so vsa različna. Točko imenujemo *zaznamovana*, če je

(i) ena od 4038 krajišč tetiv ali

(ii) presečišče vsaj dveh tetiv.

Alina označi vsako zaznamovano točko. Izmed 4038 točk, ki ustrezajo pogoju (i), Alina označi 2019 točk z 0 in ostalih 2019 točk z 1. Vsako točko, ki ustreza pogoju (ii) označi s poljubnim celim številom (ne nujno pozitivnim).

Na vsaki tetivi Alina pogleda daljice, ki povezujejo dve zaporedni zaznamovani točki. (Tetiva s k zaznamovanimi točkami ima $k - 1$ takih daljic.) Na vsaki taki daljici označi z rumeno barvo vsoto oznak obeh krajišč in z modro absolutno vrednost razlike oznak obeh krajišč.

Alina ugotovi, da je rumenih oznak $N + 1$ in zavzamejo vsako izmed vrednosti $0, 1, \dots, N$ natanko enkrat. Dokaži, da je vsaj ena modra oznaka večkratnik števila 3.

(*Tetiva* je daljica, ki povezuje dve različni točki na krožnici.)