



Miercuri, 10 Aprilie, 2019

**Problema 4.** Fie  $ABC$  un triunghi și  $I$  centrul cercului său înscris. Cercul care trece prin  $B$  și este tangent la  $AI$  în  $I$  taie din nou latura  $AB$  în  $P$ . Cercul care trece prin  $C$  și este tangent la  $AI$  în  $I$  taie din nou latura  $AC$  în  $Q$ . Demonstrați că  $PQ$  este tangentă la cercul înscris în triunghiul  $ABC$ .

**Problema 5.** Fie  $n \geq 2$  un număr întreg și fie  $a_1, a_2, \dots, a_n$  numere întregi strict pozitive. Demonstrați că există numerele întregi  $b_1, b_2, \dots, b_n$  care satisfac următoarele trei condiții:

(A)  $a_i \leq b_i$  pentru  $i = 1, 2, \dots, n$ ;

(B) resturile la împărțirea cu  $n$  ale numerelor  $b_1, b_2, \dots, b_n$  sunt diferite două câte două;

(C)  $b_1 + \dots + b_n \leq n \left( \frac{n-1}{2} + \left\lfloor \frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \right\rfloor \right)$ .

(Aici  $\lfloor x \rfloor$  desemnează partea întreagă a numărului real  $x$ , adică cel mai mare număr întreg care nu-l depășește pe  $x$ .)

**Problema 6.** Alina desenează 2019 coarde ale unui cerc, astfel încât capetele lor să fie diferite două câte două. Un punct se consideră *marcat* dacă

(i) este unul dintre cele 4038 capete ale coardelor; sau

(ii) este un punct de intersecție a cel puțin două coarde.

Alina pune câte un număr în dreptul fiecărui punct marcat. Dintre cele 4038 de puncte de tipul (i), Alina pune 0 în dreptul a 2019 puncte și 1 în dreptul celorlalte 2019 puncte. Ea pune apoi în dreptul fiecărui punct de tipul (ii) câte un număr întreg arbitrar (nu neapărat pozitiv).

De-a lungul fiecărei coarde, Alina consideră segmentele care unesc două puncte marcate consecutive. (O coardă care are  $k$  puncte marcate are  $k - 1$  astfel de segmente.) Ea scrie în dreptul fiecărui astfel de segment, cu galben, suma numerelor puse la capetele sale, și cu albastru, valoarea absolută a diferenței lor.

Alina descoperă că cele  $N + 1$  numere scrise cu galben sunt  $0, 1, \dots, N$ , fiecare exact câte o dată. Arătați că cel puțin un număr scris cu albastru este multiplu de 3.

(O *coardă* este un segment care unește două puncte ale cercului.)