European Girls' Mathematical Olympiad
Kyiv, Ukraine 2019

Language: **Polish**

Day: 2

środa, 10 kwietnia 2019 r.

Zadanie 4. Punkt I jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC. Okrąg przechodzący przez punkt B styczny do prostej AI w punkcie I przecina bok AB ponownie w punkcie P ($P \neq B$). Okrąg przechodzący przez punkt C styczny do prostej AI w punkcie I przecina bok AC ponownie w punkcie Q ($Q \neq C$). Udowodnić, że prosta PQ jest styczna do okręgu wpisanego w trójkąt ABC.

Zadanie 5. Niech $n \geqslant 2$ będzie liczbą całkowitą oraz niech $a_1, a_2, \ldots, a_n$ będą dodatnimi liczbami całkowitymi. Wykazać, że istnieją dodatnie liczby całkowite $b_1, b_2, \ldots, b_n$ spełniające następujące trzy warunki:

(A) $a_i \leqslant b_i$ dla $i = 1, 2, \ldots, n$,

(B) reszty z dzielenia liczb $b_1, b_2, \ldots, b_n$ przez n są parami różne, oraz

(C) $b_1 + \cdots + b_n \leqslant n\left(\dfrac{n-1}{2} + \left\lfloor \dfrac{a_1 + \cdots + a_n}{n} \right\rfloor\right)$.

(Powyżej $\lfloor x \rfloor$ oznacza część całkowitą liczby rzeczywistej x, czyli największą liczbę całkowitą nie większą od liczby x.)

Zadanie 6. Alina narysowała 2019 cięciw ustalonego okręgu, przy czym końce narysowanych cięciw są parami różne. Powiemy, że punkt jest *wyróżniony*, jeśli spełnia jeden z poniższych warunków:

(i) jest jednym spośród 4038 końców cięciw,

(ii) jest punktem przecięcia co najmniej dwóch cięciw.

Alina przypisuje każdemu wyróżnionemu punktowi pewną liczbę w następujący sposób. Spośród 4038 punktów spełniających warunek (i) Alina wybiera 2019 i przypisuje im liczbę 0, a pozostałym 2019 z nich przypisuje liczbę 1. Następnie przypisuje każdemu punktowi spełniającemu warunek (ii) pewną (niekoniecznie dodatnią) liczbę całkowitą.

Na każdej z cięciw Alina rozważa odcinki łączące dwa kolejne wyróżnione punkty. (Cięciwa, na której znajduje się k wyróżnionych punktów zawiera $k-1$ takich odcinków.) Przyporządkowuje ona każdemu rozważanemu odcinkowi dwie liczby: żółtą liczbę będącą sumą liczb przypisanych końcom tego odcinka, oraz niebieską liczbę będącą wartością bezwzględną ich różnicy.

Alina zauważyła, że wśród wszystkich $N+1$ żółtych liczb, każda z liczb $0, 1, \ldots, N$ wystąpiła dokładnie raz. Wykazać, że co najmniej jedna niebieska liczba jest podzielna przez 3.

(*Cięciwą* nazywamy odcinek łączący dwa różne punkty leżące na pewnym okręgu.)

Czas pracy: 4 godziny i 30 minut
Za każde zadanie można otrzymać 7 punktów