



2019年4月10日 水曜日

**問題 4.** 三角形  $ABC$  の内心を  $I$  とする. 点  $B$  を通り  $I$  において直線  $AI$  に接する円が辺  $AB$  と交わる点のうち  $B$  でない方を  $P$  とする. また, 点  $C$  を通り  $I$  において直線  $AI$  に接する円が辺  $AC$  と交わる点のうち  $C$  でない方を  $Q$  とする. このとき, 直線  $PQ$  は三角形  $ABC$  の内接円に接することを示せ.

**問題 5.**  $n$  を 2 以上の整数とし,  $a_1, a_2, \dots, a_n$  を正の整数とする. このとき, 次の 3 つの条件をみたす正の整数  $b_1, b_2, \dots, b_n$  が存在することを示せ.

- (A)  $i = 1, 2, \dots, n$  に対して  $a_i \leq b_i$  である.  
(B)  $b_1, b_2, \dots, b_n$  を  $n$  で割った余りはすべて異なる.  
(C) 不等式

$$b_1 + \dots + b_n \leq n \left( \frac{n-1}{2} + \left\lceil \frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \right\rceil \right)$$

が成り立つ.

ただし, 実数  $x$  に対して  $x$  を超えない最大の整数を  $[x]$  で表す.

**問題 6.** アリーナは, ある円の周上に端点がすべて異なるように 2019 本の弦を書き, 次のいずれかの条件をみたす点すべてに印をつける.

- (i) 弦の端点 4038 個のうちのいずれかである.  
(ii) 2 本以上の弦の交点である.

アリーナはそれぞれの印のついた点に, 以下のように整数を割り当てる.

- 条件 (i) をみたす 4038 個の点のうち 2019 個に 0, 残りの 2019 個に 1 を割り当てる.
- 条件 (ii) をみたすそれぞれの点には整数を 1 つ任意に割り当てる (割り当てる整数は正でなくてもよい).

各弦において, アリーナは隣り合う 2 つの印のついた点を端点とする線分を考え (印のついた点が  $k$  個ある弦は  $k-1$  個のそのような線分からなる), そのような線分それぞれに対して, 2 つの端点に割り当てられた整数の和を黄色で, 差の絶対値を青色で書き込む.

書き込まれた黄色の数が  $N+1$  個あり,  $0, 1, \dots, N$  がちょうど 1 回ずつ書き込まれているとき, 少なくとも 1 つの青色の 3 の倍数が書き込まれていることを示せ.

ただし, 弦とは円周上の異なる 2 点を結ぶ線分のことをいう.