



Mercoledì, 10 Aprile 2019

**Problema 4.** Sia  $ABC$  un triangolo con incentro  $I$ . La circonferenza passante per  $B$  e tangente ad  $AI$  in  $I$  interseca nuovamente il lato  $AB$  in  $P$ . La circonferenza passante per  $C$  e tangente ad  $AI$  in  $I$  interseca nuovamente il lato  $AC$  in  $Q$ .

Dimostrare che  $PQ$  è tangente alla circonferenza inscritta al triangolo  $ABC$ .

**Problema 5.** Sia  $n \geq 2$  un intero, e siano  $a_1, a_2, \dots, a_n$  degli interi positivi.

Dimostrare che esistono degli interi positivi  $b_1, b_2, \dots, b_n$  che soddisfano le seguenti tre condizioni:

(A)  $a_i \leq b_i$  per ogni  $i = 1, 2, \dots, n$ ;

(B) i resti di  $b_1, b_2, \dots, b_n$  nella divisione per  $n$  sono a due a due distinti;

(C)  $b_1 + \dots + b_n \leq n \left( \frac{n-1}{2} + \left\lfloor \frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \right\rfloor \right)$ .

(Qui  $\lfloor x \rfloor$  indica la parte intera del numero reale  $x$ , cioè il più grande intero minore o uguale di  $x$ .)

**Problema 6.** Su una circonferenza, Alessandra traccia 2019 corde i cui estremi sono tutti distinti. Un punto si considera *contrassegnato* se è

- (i) uno dei 4038 estremi di una corda; oppure
- (ii) un punto di intersezione di almeno due corde.

Alessandra etichetta ogni punto contrassegnato. Dei 4038 punti che soddisfano la condizione (i), Alessandra ne etichetta 2019 con uno 0, e gli altri 2019 con un 1. Alessandra etichetta ogni punto che soddisfa la condizione (ii) con un intero arbitrario (non necessariamente positivo).

Lungo ogni corda, Alessandra considera i segmenti che congiungono due punti contrassegnati consecutivi. (Una corda con  $k$  punti contrassegnati ha  $k - 1$  segmenti di questo tipo.) Alessandra etichetta ognuno di questi segmenti in giallo con la somma delle etichette dei suoi due estremi, e in blu con il valore assoluto della loro differenza.

Alessandra scopre che le  $N + 1$  etichette gialle assumono ogni valore  $0, 1, \dots, N$  esattamente una volta.

Dimostrare che almeno una delle etichette blu è multipla di 3.

(Una *corda* è un segmento che congiunge due punti distinti su una circonferenza.)